Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 1

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u, v)$, а

$$u = x^2 + y^2, \quad v = x^2 - y^2;$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = \sin(xz), \quad v = \sin(yz), \quad w = \sin(xy);$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

$$x^2 + zx + z^2 + y = 0;$$

(4) Исследовать функцию $f(x, y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x, y) = \sin^\alpha(\sqrt{x^2 + y^2}) \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0;$$

(5) Разложить функцию $f(x; y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ до $o\big(\rho^2\big)$, если:

$$f(x; y) = \operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 + y}, \qquad M_0(0; 0);$$

(6) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующее уравнение:

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2, \quad u = xy, \quad v = \frac{y}{x};$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad u = x, \quad v = x - y, \quad w = x - y + z;$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$f(x; y) = (2ax - x^2)(2by - y^2), \qquad a \neq 0, \;\; b \neq 0;$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x; y)$, заданную неявно:

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x; y; z)$ относительно заданного условия связи:

$$u(x; y; z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2, \quad x + y + z = 13;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 2

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u,v)$, а

$$u = xy, \quad v = \frac{x}{y};$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u,v,w)$,

$$u = x^2 + y^2, \quad v = y^2 + z^2, \quad w = x^2 + z^2;$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x;y)$, заданной неявно:

$$x^3 + y^3 - 3xyz - z^3 = 1;$$

(4) Исследовать функцию $f(x,y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}^{\alpha}(\sqrt{x^6 + y^6}) \sin\frac{1}{x^2 + y^2}, \quad f(0,0) = 0;$$

(5) Разложить функцию $f(x;y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ до $o\big(\rho^2\big)$, если:

$$f(x;y) = \operatorname{arctg}(x/y), \quad M_0(1;1);$$

(6) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующее уравнение:

$$2y\frac{\partial z}{\partial x} + e^x\frac{\partial z}{\partial y} = 4ye^x, \quad u = y^2 + e^x, \quad v = y^2 - e^x;;$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать следующие уравнения:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad u = xy, \quad v = y, \quad w = z - y;$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$f(x;y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y};$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x;y)$, заданную неявно:

$$x^4 + z(x^2+1) = y^2x + z^2;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x;y;z)$ относительно заданного условия связи:

$$u(x;y;z) = 2x + y - z, \qquad x^2 + y^2 + 2z^2 = 22;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 3

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u, v)$, а

$$u = x^2 + y^2, \quad v = xy;$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = x + y^2, \quad v = y + z^2, \quad w = z + x^2;$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

$$2\ln(xyz) = x^2 + y^2 - z^2 - 1, \quad x > 0,\ y > 0,\ z > 0;$$

(4) Исследовать функцию $f(x, y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x, y) = \arcsin^\alpha\left(\frac{x^4 + y^4}{1 + x^2 + y^2}\right)\cos\frac{1}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0;$$

(5) Разложить функцию $f(x; y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ до $o\big(\rho^2\big)$, если:

$$f(x; y) = \frac{\cos x}{\cos y}, \qquad M_0(0; 0);$$

(6) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующее уравнение:

$$y\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial x} + xy = 0, \quad u = \frac{y}{x}, \quad v = yx^3;$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad u = y + x, \quad v = y - x, \quad w = xy - z;$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$f(x; y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2;$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x; y)$, заданную неявно:

$$2z^2 + 2x^2 + y^2 + 2xz - 4x - 4y - 4z + \frac{2}{3} = 0;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $f = (x; y)$ относительно заданного условия связи:

$$f(x; y) = x - y, \qquad \operatorname{tg} x - 3\operatorname{tg} y = 0, \;\; |x| < \pi/2, \;\; |y| < \pi/2;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 4

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u,v)$, а

$$u = \frac{x}{y}, \quad v = \frac{y}{x};$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u,v,w)$,

$$u = xe^z, \quad v = ye^z, \quad w = ze^{x-y};$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x;y)$, заданной неявно:

$$x^4 + y^4 + z^4 = 4xyz;$$

(4) Исследовать функцию $f(x,y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x,y) = (\sqrt{x^4+y^2})^\alpha \sin\frac{1}{x^2+y^2}, \quad f(0,0) = 0;$$

(5) Разложить функцию $f(x;y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ до $o\big(\rho^2\big)$, если:

$$f(x;y) = \sqrt{\frac{(1+x)^\alpha + (1+y)^\beta}{2}}, \ \ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}, \qquad M_0(0;0);$$

(6) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующее уравнение:

$$2y\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+2y=0, \quad y=v, \quad x=\frac{4+v^2}{2};$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать следующие уравнения:

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=4, \quad u=x+y, \quad v=x-y, \quad w=xz;$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$f(x;y)=e^{2x}(x+y^2+2y);$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z=z(x;y)$, заданную неявно:

$$(x^2+y^2+z^2)^2=5(x^2-y^2+z^2), \;\; z>0;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u=u(x;y;z)$ относительно заданного условия связи:

$$u(x;y;z)=xyz, \qquad x^2+y^2+z^2=a^2, \;\; a>0;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 5

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u,v)$, а

$$u = x + y, \quad v = x^2 + y^2;$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = xy^2, \quad v = yz^2, \quad w = zx^2;$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x;y)$, заданной неявно:

$$x = u\,\cos v,\ \ y = u\,\sin v,\ \ z = uv;$$

(4) Исследовать функцию $f(x,y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x,y) = (\mathrm{ch}(x^2 + 2y^2) - 1)^{\alpha} \sin\frac{1}{x^4 + y^4}, \quad f(0,0) = 0;$$

(5) Разложить функцию $f(x;y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ до $o\big(\rho^2\big)$, если:

$$f(x;y) = \mathrm{arctg}\left(x^2y - 2e^{x-1}\right), \qquad M_0(1;3);$$

(6) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующее уравнение:

$$y\frac{\partial z}{\partial y} + 4\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{xy}, \quad x = v^2, \quad y = (u-v)^2;$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать следующие уравнения:

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}, \quad x = \cos u, \quad y = \cos v, \quad z = e^w;$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$f(x;y) = x^2 + 3xy - 8\ln|x| - 6\ln|y|;$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x;y)$, заданную неявно:

$$z^2 + xyz - yx^2 - y^3 = 0;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x;y;z)$ относительно заданного условия связи:

$$u(x;y;z) = xy^2z^3, \;\; x + my^2 + nz^3 = 1, \quad m > 0,\; n > 0,\; x > 0,\; y > 0, z > 0;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 6

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u,v)$, а

$$u = \frac{x^2}{y}, \quad v = \frac{y^2}{x};$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u,v,w)$,

$$u = \sin\frac{x}{z}, \quad v = \sin\frac{y}{z}, \quad w = \cos(xy);$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x;y)$, заданной неявно:

$$x = u + \ln v, \ \ y = v - \ln u, \ \ z = 2u + v;$$

(4) Исследовать функцию $f(x,y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x,y) = \left(e^{\frac{x^4+y^4}{1+x^2+y^2}} - 1\right)^{\alpha} \cos\frac{1}{x^2+y^2}, \quad f(0,0) = 0;$$

(5) Разложить функцию $f(x;y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ до $o\big(\rho^2\big)$, если:

$$f(x;y) = \arcsin\left(2x - \frac{3}{2}xy\right), \qquad M_0(-1;1);$$

(6) Вводя новые переменные, преобразовать следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$y^2 + (x^2 - xy)y' = 0, \quad y = tx, \quad y = y(t);$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать следующие уравнения:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2}x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{y}, \quad u = \frac{y}{x}, \quad v = y, \quad w = yz - x;$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$u(x; y; z) = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x; y)$, заданную неявно:

$$5z^2 + 4zy + y^2 - 2y + 3x^2 - 6x + 4 = 0;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x; y; z)$ относительно заданного условия связи:

$$u(x; y; z) = x^2y^3z^4, \;\; 2x + 3y + 4z = 18, \;\; x > 0, \; y > 0, \; z > 0;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 7

(1) Найдите $df,\ d^2 f$, если $f = f(u, v)$, а

$$u = x^y, \quad v = y^x;$$

(2) Найти df, $d^2 f$, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = x\cos z, \quad v = y\cos z, \quad w = \sin(x^2 + y^2);$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

$$x = u\,e^{u+v}, \ \ u\,e^{u-v}, \ \ z = u^2 + v^2;$$

(4) Исследовать функцию $f(x, y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x, y) = \operatorname{tg}^{\alpha}(\sqrt{x^4 + y^4}) \sin\frac{1}{|x| + |y|}, \quad f(0, 0) = 0;$$

(5) Разложить функцию $f(x; y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ до $o\big(\rho^2\big)$, если:

$$f(x; y) = \cos\left(3\arcsin x + y^2 - 2xy\right), \qquad M_0(1/2; 1);$$

(6) Вводя новые переменные, преобразовать следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$xy'' - y' + xy = 0, \quad t = \frac{x^2}{4}, \quad y = y(t);$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать следующие уравнения:

$$(1-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad u = \frac{y}{2} + \sqrt{1-x}, \quad v = \frac{y}{2} - \sqrt{1-x}, \quad w = \sqrt{2}z(\sqrt[4]{1-x});$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$u(x;y;z) = x^2 - 2xy + 4y^2 + 6z^2 + 6yz - 6z;$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x;y)$, заданную неявно:

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x;y;z)$ относительно заданного условия связи:

$$u(x;y;z) = \sin x \sin y \sin z, \;\; x + y + z = \pi/2, \;\; x > 0, \; y > 0, \; z > 0;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 8

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u, v)$, а

$$u = xy, \quad v = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = \frac{x}{y^2}, \quad v = \frac{x}{z^2}, \quad w = zy;$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2yz - 2xz - 72 = 0;$$

(4) Исследовать функцию $f(x, y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x, y) = \left(5^{\frac{x^2+y^4}{1+x^2+y^4}} - 1\right)^{\alpha} \cos\frac{1}{|x| + |y|}, \quad f(0, 0) = 0;$$

(5) Разложить функцию $f(x; y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ до $o\big(\rho^2\big)$, если:

$$f(x; y) = \ln\big(\pi - 4\,\mathrm{arctg}\,x + x^2/y\big), \qquad M_0(1; 1);$$

(6) Вводя новые переменные, преобразовать следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0, \quad x = e^t, \quad y = y(t);$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad u = x + y, \quad v = \frac{y}{x}, \quad w = \frac{z}{x};$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$u(x; y; z) = yx^3z^2(2 - y - 2z - 3x);$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x; y)$, заданную неявно:

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2(x^2 + y^2 + z^2);$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x; y; z)$ относительно заданного условия связи:

$$u(x; y; z) = x - 2y + 2z, \;\; x^2 + y^2 + z^2 = 9;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 9

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u, v)$, а

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v = xy;$$

(2) Найти df, $d^2 f$, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = e^x \sin z, \quad v = e^y \sin z, \quad w = \cos z;$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

$$x = \cos u \sin v, \ \ y = \cos u \cos v, \ \ z = \sin u;$$

(4) Исследовать функцию $f(x, y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x, y) = (\sqrt[3]{x^3 y^5})^\alpha \sin \frac{1}{|x| + |y|}, \quad f(0, 0) = 0;$$

(5) Разложить по формуле Маклорена до $o\big(\rho^4\big),\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, функцию $f(x; y)$, если:

$$f(x; y) = \frac{1}{(1 - x)(1 - y)};$$

(6) Вводя новые переменные, преобразовать следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 0, \quad t = \ln x, \quad y = y(t);$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать следующие уравнения:

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 4\frac{\partial z}{\partial x} + 4\frac{\partial z}{\partial y} + z = 0, \quad u = 2y - x, \quad v = x, \quad z = we^{-x-y};$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$f(x; y) = x + y + 8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \;\; 0 \leqslant y \leqslant 2\pi;$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x; y)$, заданную неявно:

$$z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x; y; z)$ относительно заданного условия связи:

$$u(x; y; z) = xy + 2xz + 2yz, \;\; xyz = 108;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 10

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u, v)$, а

$$u = \cos(xy), \quad v = \sin(xy);$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = \frac{1}{x+z}, \quad v = \frac{1}{y+z}, \quad w = \sqrt{xy};$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y = 3;$$

(4) Исследовать функцию $f(x, y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x, y) = (1 - \cos(x^4 + y^2))^\alpha \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0;$$

(5) Разложить по формуле Маклорена до $o(\rho^4)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, функцию $f(x; y)$, если:

$$f(x; y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2};$$

(6) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать следующее уравнение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + x + y = 0, \quad u = y + x, \quad v = y - x, \quad w = xy - z.$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать следующие уравнения:

$$(1 - x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{4}z = 0, \quad u = \frac{y + \alpha}{2}, \quad v = \frac{y - \alpha}{2}, \quad z = \frac{w}{\sqrt{\sin\alpha}}, \quad x = \cos\alpha;$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$u(x; y; z) = \ln xy - z(x - y) - x^2 - y^2 + 2xy - y;$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x; y)$, заданную неявно:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 4z + 8 = 0, \quad z > 2;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x; y; z)$ относительно заданного условия связи:

$$u(x; y; z) = x + y + z, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1, \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 11

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u,v)$, а

$$u = xe^y, \quad v = ye^x;$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u,v,w)$,

$$u = \sqrt{x+y}, \quad v = \sqrt{x+z}, \quad w = x+y+z;$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x;y)$, заданной неявно:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

(4) Исследовать функцию $f(x,y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x,y) = \ln^\alpha\left(1 + 2x^4 + y^4\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, \quad f(0,0) = 0;$$

(5) Разложить по формуле Маклорена до $o\big(\rho^4\big),\ \rho = \sqrt{x^2+y^2}$, функцию $f(x;y)$, если:

$$f(x;y) = \cos x \cdot \cos y;$$

(6) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать следующие уравнения:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 4x, \quad u = x, \quad v = x - y, \quad w = x - y + z;$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующее уравнение:

$$(1 + x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 + y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad u = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad v = \ln(y + \sqrt{1 + y^2});$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$u(x; y; z) = xyz(16 - x - y - 2z);$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x; y)$, заданную неявно:

$$25x^2 + y^2 + 16z^2 - 50x + 64z - 311 = 0, \quad z < -2;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x; y; z)$ относительно заданных условий связи:

$$u(x; y; z) = xyz, \;\; x + y - z = 3, \;\; x - y - z = 8;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 12

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u, v)$, а

$$u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \quad v = x + y;$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = \cos x + \sin z, \quad v = \sin y + \cos z, \quad w = \cos x - \cos y;$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 x = 1;$$

(4) Исследовать функцию $f(x, y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x, y) = \sin^\alpha(\sqrt[3]{x^6y^2}) \cos\frac{1}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0;$$

(5) Разложить по формуле Маклорена до $o\big(\rho^5\big),\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, функцию $f(x; y)$, если:

$$f(x; y) = \frac{\sin x}{\cos y};$$

(6) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать следующие уравнения:

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)+z+x+y=0, \quad u=y+x, \quad v=x-y, \quad w=zx;$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad u=\frac{1}{3}(x-y), \quad v=\frac{1}{3}(2x+y);$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$u(x;y;z)=z\ln z-z-z\ln xy+xy+x^2+2y^2-4x-2y;$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z=z(x;y)$, заданную неявно:

$$x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-36z=0, \quad z>2;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u=u(x;y;z)$ относительно заданного условия связи:

$$u(x;y;z)=xyz, \;\; xy+xz+yz=a^2, \quad x>0, \;\; y>0, \;\; z>0, \;\; a>0;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 13

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u, v)$, а

$$u = x\cos y, \quad v = y\cos x;$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = \ln(xz^2), \quad v = \ln(y^3 z), \quad w = \ln(x + y);$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

$$3x^2y^2 + 2z^2xy - 2zx^3 + 4zy^3 = 4;$$

(4) Исследовать функцию $f(x, y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x, y) = \arcsin^{\alpha}\left(\frac{2x^4y^2}{1 + x^4 + y^4}\right)\cos\frac{1}{|x| + |y|}, \quad f(0, 0) = 0;$$

(5) Разложить по формуле Маклорена до $o\big(\rho^6\big),\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, функцию $f(x; y)$, если:

$$f(x; y) = e^x \sin y;$$

(6) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать следующие уравнения:

$$y\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad u = \frac{y}{x}, \quad v = y, \quad w = yz - x;$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial z}{\partial x} + 6\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad u = x + y, \quad v = 3x - y$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$f(x;y) = 4 - (x^2 + y^2)^{2/3};$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x;y)$, заданную неявно:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 8(x^2 + y^2 - z^2), z > 0;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x;y;z)$ относительно заданных условий связи:

$$u(x;y;z) = xyz, \;\; xy + yz + zx = 8, \;\; x + y + z = 5;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 14

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u, v)$, а

$$u = \frac{x}{y+1}, \quad v = \frac{y}{x+1};$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = \ln(x-y), \quad v = \ln(y-z), \quad w = \ln(z-x);$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

$$xz^5 + y^3z - x^3 = 0;$$

(4) Исследовать функцию $f(x, y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x, y) = (\sqrt[7]{3x^5y^3})^\alpha \cos\frac{1}{|x|+|y|}, \quad f(0, 0) = 0;$$

(5) Разложить по формуле Маклорена до $o\big(\rho^6\big),\ \rho = \sqrt{x^2+y^2}$, функцию $f(x; y)$, если:

$$f(x; y) = e^{2x}\ \ln(1+y);$$

(6) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать следующие уравнения:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\sin^2 x + \operatorname{ctg} x \frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z, \quad u = 2y + \operatorname{tg} z \operatorname{ctg} x, \quad v = \operatorname{ctg} x(\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} x), \quad w = \operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} x;$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad u = 2x - y, \quad v = x;$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$f(x;y) = \frac{x^2 - y^2}{1 + x^4 + y^4 - 2x^2y^2};$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x;y)$, заданную неявно:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 9)^2 = 100(x^2 + y^2), \quad z < 0;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x;y;z)$ относительно заданного условия связи:

$$u(x;y;z) = x - y + 2z, \;\; x^2 + y^2 + 2z^2 = 16;;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 15

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u,v)$, а

$$u = \cos(x+y), \quad v = \cos(xy);$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u,v,w)$,

$$u = \frac{1}{\sqrt{xy}}, \quad v = \sqrt{xy}, \quad w = \sqrt{x+y+z};$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x;y)$, заданной неявно:

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0;$$

(4) Исследовать функцию $f(x,y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x,y) = (1 - \cos(x^4 + y^4))^{\alpha} \sin\frac{1}{|x|+|y|}, \quad f(0,0) = 0;$$

(5) Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x;y)$, если:

$$f(x;y) = \frac{1-x+y}{1+x-y};$$

(6) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать следующие уравнения:

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} = e^z, \quad u = y^2 + x^2, \quad v = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \quad w = \frac{x^2+y^2}{e^z};$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad u = xy, \quad v = \frac{y}{x};$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$u(x;y;z) = x^3 + y^3 + z^2 + 3xy - 2z - 9x - 9y;$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x;y)$, заданную неявно:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 3 = 0;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x;y;z)$ относительно заданных условий связи:

$$u(x;y;z) = xy + yz, \;\; x^2 + y^2 = 2, \;\; y + z = 2, \;\; y > 0;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 16

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u,v)$, а

$$u = \operatorname{arctg}(xy), \quad v = \frac{x}{y};$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u,v,w)$,

$$u = \operatorname{arctg}(xz), \quad v = \operatorname{arctg}(yz), \quad w = \operatorname{arctg}(x+y);$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x;y)$, заданной неявно:

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xz - z = 8;$$

(4) Исследовать функцию $f(x,y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x,y) = (\sqrt{1+3x^4+y^4} - 1)^{\alpha} \cos\frac{1}{|x|+|y|}, \quad f(0,0) = 0;$$

(5) Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ функцию $f(x;y)$, если:

$$f(x;y) = e^{x+y}, \qquad x_0 = y_0 = 2;$$

(6) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать следующие уравнения:

$$(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz, \quad u=yz-x, \quad v=xz-y, \quad w=xy-z;$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \quad u=xe^y, \quad v=y;$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$f(x;y)=x^5+3x^3y+3y^3x+y^5;$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z=z(x;y)$, заданную неявно:

$$2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u=u(x;y;z)$ относительно заданных условий связи:

$$u(x;y;z)=x^2+y^2+z^2, \;\; \frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1, \;\; x+y+z=0;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 17

(1) Найдите $df,\ d^2 f$, если $f = f(u, v)$, а

$$u = \ln(x^2 + y^2), \quad v = e^{x+y};$$

(2) Найти df, $d^2 f$, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = x^2 + e^z, \quad v = y^2 + e^z, \quad w = e^{x^2+y^2};$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

$$z + \ln(x + y + z) = 0;$$

(4) Исследовать функцию $f(x, y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x, y) = \operatorname{sh}^\alpha(\sqrt{x^6 + y^2}) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0;$$

(5) Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x; y)$, если:

$$f(x; y) = \sqrt{1 + x + y + xy};$$

(6) Преобразовать к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, следующие выражения:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y};$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad u = \frac{y}{x}, \quad v = yx^3;$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$u(x; y; z) = x\cos y + z\cos x;$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x; y)$, заданную неявно:

$$x^3 - y^2 + z^2 - 3x + 4y + z = 8;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x; y; z)$ относительно заданных условий связи:

$$u(x; y; z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2, \;\; x^2 + y^2 + z^2 = 21, \;\; 3x + 2y + z = 0;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 18

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u, v)$, а

$$u = \ln\sin(xy), \quad v = \ln\cos(xy);$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = \frac{z}{x}, \quad v = \frac{z}{y}, \quad w = \ln(xyz);$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right) = 1;$$

(4) Исследовать функцию $f(x, y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x, y) = \operatorname{th}^{\alpha}(x^2 + y^2)\cos\frac{1}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0;$$

(5) Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ функцию $f(x; y)$, если:

$$f(x; y) = \sin\left(x + y^2\right), \qquad x_0 = \pi/2, \;\; y_0 = 0;$$

(6) Преобразовать к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, следующее выражение:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y};$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующее уравнение:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad u = \frac{y}{x}, \quad v = y;$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$u(x;y;z) = xy^2z^3(49 - x - 2y - 3z);$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x;y)$, заданную неявно:

$$z = 2xy - 3x^2 - 2z^2 + 10;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x;y;z)$ относительно заданных условий связи:

$$u(x;y;z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2, \;\; x^2 + y^2 + z^2 = 1, \;\; x + 2y + 3z = 0;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ____________________________

Имя ____________________________

Группа _________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 19

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u, v)$, а

$$u = \sqrt{x + y}, \quad v = \sqrt{y - x};$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = y + \ln x, \quad v = x - \ln y, \quad w = \operatorname{tg} \frac{x}{y};$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 x = 1;$$

(4) Исследовать функцию $f(x, y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x, y) = (\operatorname{ch}(x^4 + y^2) - 1)^\alpha \sin \frac{1}{|x| + |y|}, \quad f(0, 0) = 0;$$

(5) Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x; y)$, если:

$$f(x; y) = \cos^4 \left(\frac{x - y}{2} \right);$$

(6) Преобразовать к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, следующие выражения:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2;$$

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\sin x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + (2-\cos^2 x)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad u = x, \quad v = y - \cos x;$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$u(x;y;z) = \frac{xy + xz^2 + y^2 z}{xyz} + x + 1;$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x;y)$, заданную неявно:

$$(x^2+y^2)^2 + z^4 - 8(x^2+y^2) - 10z^2 = -16;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x;y;z)$ относительно заданного условия связи:

$$u(x;y;z) = x + y + z, \;\; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 20

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u, v)$, а

$$u = \frac{1}{\sqrt[3]{xy}}, \quad v = \sqrt{x^3y^3};$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = \frac{e^x}{y}, \quad v = \frac{e^x}{z}, \quad w = \frac{x}{z};$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0;$$

(4) Исследовать функцию $f(x, y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x, y) = (\sqrt[3]{1 + x^2y^4} - 1)^\alpha \cos\frac{1}{|x| + |y|}, \quad f(0, 0) = 0;$$

(5) Разложить функцию $f(x; y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ до $o\big(\rho^2\big)$, если:

$$f(x; y) = \frac{\sin x}{\sin y}, \qquad M_0(0; 0);$$

(6) Преобразовать уравнение

$$(y+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

приняв y за функцию, а x и z — за новые независимые переменные;

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$$\operatorname{tg}^2 x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2y\operatorname{tg} x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\operatorname{tg}^3 x\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad u=y\sin x, \quad v=y;$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$u(x;y;z)=\frac{256}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+z^2;$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z=z(x;y)$, заданную неявно:

$$6x^2+6y^2+6z^2+4x-8y-8z=-5;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u=u(x;y;z)$ относительно заданного условия связи:

$$u(x;y;z)=z-y+2z, \quad x^2+y^2+z^2=2;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 21

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u, v)$, а

$$u = x^y, \quad v = \cos(x + y);$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = \sqrt{\ln x}, \quad v = \sqrt{\ln(xy)}, \quad w = \sqrt{\ln(xyz)};$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1;$$

(4) Исследовать функцию $f(x, y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x, y) = \log_2^{\alpha}\left(1 + 2x^2 + y^4\right) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0;$$

(5) Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x; y)$, если:

$$f(x; y) = \cos x \cdot \operatorname{ch} y;$$

(6) Преобразовать уравнение

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

приняв x за функцию, а y и z — за новые независимые переменные;

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\sqrt{xy}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad u = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad v = \sqrt{x};$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$u(x;y;z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z};$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x;y)$, заданную неявно:

$$x^3y - 3xy^2 + 6x + y^2 + 7y + z^2 - 3z = 14;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x;y;z)$ относительно заданного условия связи:

$$u(x;y;z) = 3x^2 + 3y^2 + z^2, \quad x + y + z = 1;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 22

(1) Найдите df, d^2f, если $f = f(u, v)$, а

$$u = \operatorname{tg}(xy), \quad v = \sqrt{\frac{x}{y}};$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = \frac{1}{\sin x}, \quad v = \frac{1}{\sin(x+y)}, \quad w = \frac{1}{\cos(y-z)};$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

$$z - x = y \operatorname{ctg} z - x;$$

(4) Исследовать функцию $f(x, y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x, y) = \ln^{\alpha}\left(x^2 + \sqrt{1 + 2x^4 + y^4}\right) \cos\frac{1}{x^4 + y^4}, \quad f(0, 0) = 0;$$

(5) Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ функцию $f(x; y)$, если:

$$f(x; y) = \ln\frac{xy - y}{x - y}, \qquad x_0 = 0, \ \ y_0 = 1;$$

(6) Преобразовать уравнение

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1,$$

приняв y за функцию, а $u = x + z$ и $v = y - z$ — за новые независимые переменные;

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad y = v, \quad x = \frac{u + v^2}{2};$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$u(x; y; z) = \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz} + \frac{z^2}{xy};$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x; y)$, заданную неявно:

$$x^4 + y^4 + z^4 = 10(x^2 + y^2 + z^2);$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x; y; z)$ относительно заданного условия связи:

$$u(x; y; z) = xy + 2xz + 2yz, \quad xyz = 4;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 23

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u,v)$, а

$$u = \frac{x}{\sqrt{x+y}}, \quad v = \frac{y}{\sqrt{x+y}};$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u,v,w)$,

$$u = e^{\frac{x}{z}}, \quad v = y^2z^3, \quad w = \ln(x+y);$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x;y)$, заданной неявно:

$$z^2 \ln(z+x) = xy;$$

(4) Исследовать функцию $f(x,y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x,y) = \operatorname{th}^{\alpha}(x^4y^2)\cos\frac{1}{x^4+y^4}, \quad f(0,0) = 0;$$

(5) Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x;y)$, если:

$$f(x;y) = \sin x \cdot \sin y;$$

(6) Преобразовать уравнение

$$z\left(y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}+z\right)=y\frac{\partial z}{\partial x},$$

приняв x за функцию, а $u=yz+x$ и $v=xz+y$ — за новые независимые переменные;

(7) Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0,\quad u=x,\quad v=2\sqrt{y};$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$u(x;y;z)=(x+7z)e^{-(x^2+y^2+z^2)};$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z=z(x;y)$, заданную неявно:

$$(x^2+y^2)^2+z^4-4(x^2+y^2)-5z^2=-8;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u=u(x;y;z)$ относительно заданного условия связи:

$$u(x;y;z)=x+y+z,\;\; x^2-y^2-x-y-z=0;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 24

(1) Найдите df, $d^2 f$, если $f = f(u, v)$, а

$$u = \ln \frac{x}{y^2}, \quad v = \ln(x^2 y);$$

(2) Найти df, $d^2 f$, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = \cos(x + y), \quad v = \cos(y - z), \quad w = \cos(xz);$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

$$ze^z = xe^x + ye^y;$$

(4) Исследовать функцию $f(x, y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x, y) = \operatorname{sh}^\alpha(x^2 + y^2) \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0;$$

(5) Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ функцию $f(x; y)$, если:

$$f(x; y) = \sin(x + y), \qquad x_0 = 0, \;\; y_0 = \pi/2;$$

(6) Приняв ξ, η и τ за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от ξ, η и τ, преобразовать следующие уравнения:

$$(y+z)\frac{\partial u}{\partial x}+(z+x)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=u, \quad x-y=\frac{\xi}{u}, \quad y-z=\frac{\eta}{u}, \quad x+y+z=\tau, \quad w=u^2;$$

(7) Преобразовать к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, следующие выражения:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$u(x;y;z)=2\ln x+3\ln y+5\ln z+\ln(22-x-y-z);$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x;y)$, заданную неявно:

$$(x^2+y^2+z^2+4)^2=10(x^2+y^2), \quad z<0;;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x;y;z)$ относительно заданных условий связи:

$$u(x;y;z)=x^2+y^2+z^2, \quad lx+my+nz=0, \ \ (x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2;$$

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по функциям нескольких переменных

Фамилия ____________________________

Имя ____________________________

Группа _________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 25

(1) Найдите $df,\ d^2f$, если $f = f(u, v)$, а

$$u = \arcsin\frac{x}{y}, \quad v = \cos(x^2 + y^2);$$

(2) Найти df, d^2f, если $f = f(u, v, w)$,

$$u = \frac{1}{x + y + z}, \quad v = \frac{1}{y + z}, \quad w = \sqrt{x + y};\,;$$

(3) Найдите первый и второй дифференциалы функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 y^2}}\right) = 5;$$

(4) Исследовать функцию $f(x, y)$ на непрерывность и дифференцируемость в зависимости от значений параметра α:

$$f(x, y) = (\operatorname{ch}(x^2 + 2y^2) - 1)^{\alpha} \sin\frac{1}{x^4 + y^4}, \quad f(0, 0) = 0;$$

(5) Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x; y)$, если:

$$f(x; y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x - y}{1 + xy}\right);$$

(6) Приняв ξ, η и τ за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от ξ, η и τ, преобразовать следующие уравнения:

$$2\cos z\frac{\partial u}{\partial z} = u\sin z\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-1\right),\quad u\cos z=\xi,\quad u\sin z=\eta,\quad x+y+u=\tau,\quad w=u^2;$$

(7) Преобразовать к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, следующие выражения:

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

(8) Исследуйте на экстремум следующую функцию:

$$u(x;y;z) = x^2+y^2-z^2-4x+6y-2z;$$

(9) Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x;y)$, заданную неявно:

$$2z^2+x^2+y^2-yz+x-1=0;$$

(10) Найдите точки условного экстремума функции $u = u(x;y;z)$ относительно заданных условий связи:

$$u(x;y;z) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},\ \ x^2+y^2+z^2=1,\ \ lx+my+nz=0;$$